

Подготовка к ЕГЭ

Учитель : Чернобай Н.В., Богданова С.В.

Метод коэффициентов в задаче В11

Многие задачи В11 решаются *элементарно* с помощью специальных приемов из высшей математики. Рассмотрим некоторые алгоритмы.

Объем многогранника

Часто в задачах В11 дается многогранник и его объем. Затем многогранник растягивается или сжимается по разным направлениям. В результате получается новый многогранник, объем которого и требуется найти.

Как решать такие задачи? Прежде всего, запомните вот что:

Многогранник рассматривается в *трехмерном пространстве*. И все изменения происходят по одной из трех осей.

Теперь, когда в задаче написано «высота цилиндра увеличена в 2 раза, а основание уменьшено в 3 раза», это следует понимать так:

1. Сжатие в 2 раза по оси OZ ;
2. Растяжение в 3 раза по осям OX и OY .

Обратите внимание: растяжение произошло сразу *по двум осям*. Ведь окружность — фигура двумерная, в отличие, например, от отрезка (который одномерен). Поэтому изменение радиуса влечет растяжение сразу «в обе стороны». Мы еще вернемся к этому факту, когда будем рассматривать реальные задачи.

А сейчас — основная теорема:

1. Теорема

Пусть дан объем исходного многогранника $V_{\text{старый}}$. Пусть также известны числа a , b и c — коэффициенты растяжения для осей OX , OY и OZ соответственно. Тогда объем нового многогранника $V_{\text{новый}}$ рассчитывается по формуле:

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot a \cdot b \cdot c$$

Если по какой-то оси производится **сжатие** многогранника, а не растяжение, то вместо умножения просто пишется **деление**.

В частности, если все стороны многогранника изменились в одинаковое число раз (пусть это будет n), новый объем считается так:

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot n^3$$

Вот так все просто. Единственная загвоздка — определить, по какой оси и во сколько раз происходит растяжение или сжатие. Но это вопрос тренировки.

Задача [ЕГЭ 2011]

Параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ имеет объем 35 см^3 . Ребро AB увеличили в 2 раза, ребро AC — в 5 раз, а ребро AA_1 уменьшили в 7 раз. Найдите объем нового параллелепипеда.

Решение

Только не надо чертить параллелепипед! Эта задача словно создана для решения описанным выше методом. Имеем:

1. $V_{\text{старый}} = 35$;
2. Ось OX : растяжение в 2 раза $a = 2$;
3. Ось OY : растяжение в 5 раз $b = 5$;
4. Ось OZ : сжатие в 7 раз $c = 1/7$.

Рассчитываем объем нового параллелепипеда:

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot a \cdot b \cdot c = 35 \cdot 2 \cdot 5 : 7 = 50$$

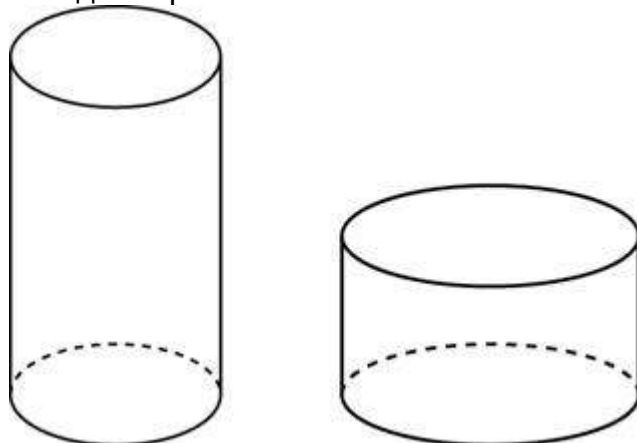
Получили, что $V_{\text{новый}} = 50$ — это и есть ответ.

Ответ

50

Задача [Пробный ЕГЭ 2012]

Высоту кругового цилиндра увеличили в 4 раза, а радиус основания уменьшили в 3 раза. Найдите объем нового цилиндра, если объем исходного равен 45 м^3 .



Решение

По условию, нам известно:

1. $V_{\text{старый}} = 45$;
2. По оси OZ идет растяжение в 4 раза, поэтому $c = 4$;
3. По осям OX и OY идет сжатие в 3 раза, поэтому $a = b = 1/3$.

Теперь можно найти объем:

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot a \cdot b \cdot c = 45 \cdot 4 : 3 : 3 = 20$$

Обратите внимание, что сжатие идет сразу по двум осям: OX и OY . Ведь мы работаем с *круговым цилиндром*, в основании которого лежит окружность. Но окружность — объект двумерный, и чтобы сохранить пропорции, надо менять радиус по обоим измерениям. Иначе получится не окружность, а эллипс.

Ответ

20

Задача [Демонстрационный ЕГЭ 2011]

Бетонный шар весит 0,75 т. Сколько будет весить шар, изготовленный из того же материала, если его радиус в 2 раза больше?

Решение

Поскольку шары изготовлены из одного и того же материала, масса меняется по тому же закону, что и объем. Следовательно, работаем по формулам, приведенным выше.

1. $V_{\text{старый}} = 0,75$;
2. Растяжение в 2 раза по всем осям $a = b = c = 2$.

Почему растяжение по всем осям одинаково? Да очень просто: если растяжения будут разные, получится «приплюснутый» шар — в математике он называется эллипсоид. Чтобы такого не случилось, радиус меняется по всем осям.

Осталось найти ответ (по упрощенной формуле):

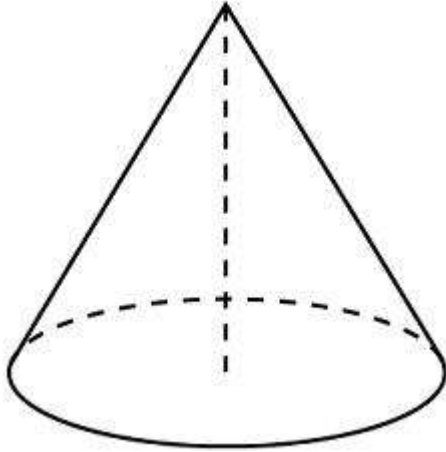
$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot a^3 = 0,75 \cdot 2^3 = 6$$

Ответ

6

Задача

Высоту прямого кругового конуса увеличили в 5 раз, а радиус основания уменьшили в 3 раза. В результате получился новый конус объемом 30. Найдите объем исходного конуса.



Решение

Выписываем коэффициенты и работаем по той же самой формуле:

1. Мы не знаем $V_{\text{старый}}$, зато знаем $V_{\text{новый}} = 30$;
2. Растяжение по оси OZ в 5 раз $c = 5$;
3. В основании лежит окружность, поэтому сжатие в 3 раза идет сразу по двум осям: OX и OY $a = b = 1/3$;

Записываем формулу объема:

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot a \cdot b \cdot c$$

$$30 = V_{\text{старый}} \cdot 5 : 3 : 3$$

$$V_{\text{старый}} = 30 \cdot 3 \cdot 3 : 5 = 54$$

Ответ

54

Как видите, ничего сложного в задачах на объем нет. Просто выписываем числа и подставляем в формулу. А теперь разберемся с задачами на площади.

Площадь поверхности многогранника и тел вращения

Чтобы найти площадь многогранника после растягивания или сжатия, используйте следующую теорему:

Теорема

Когда все стороны многогранника увеличить в n раз, его *площадь увеличится* в n^2 раз:

$$S_{\text{новая}} = S_{\text{старая}} \cdot n^2$$

Аналогично, если все стороны сжать в n раз, площадь уменьшится в n^2 раз.

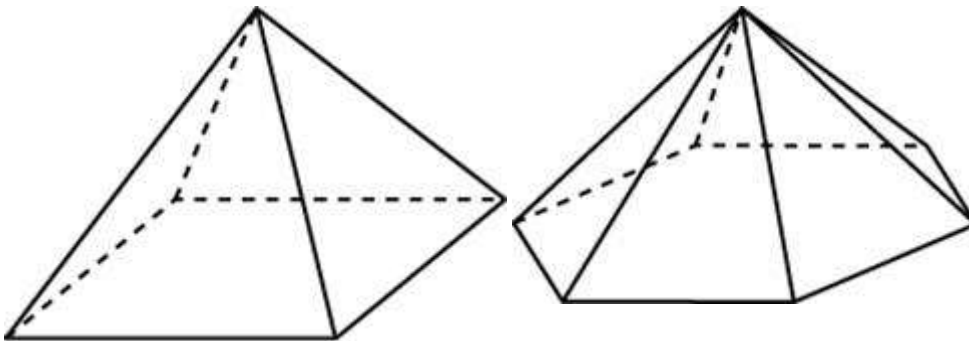
Как видите, формула площадей очень похожа на частный случай формулы объемов. Разница лишь в степени:

1. $V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot n^3$, поскольку объем — это «трехмерная» величина. Например, объем измеряется в кубических метрах (м^3);
2. $S_{\text{новая}} = S_{\text{старая}} \cdot n^2$, поскольку площадь — величина «двумерная» и измеряется в квадратных метрах (м^2).

Те, кто не знает эти правила, каждый раз вспоминают формулы объема и площади. Вот только у каждого многогранника эти формулы свои, и в них легко запутаться.

Задача [Пробный ЕГЭ 2012]

Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильной пирамиды, если все ее стороны увеличить в 7 раз?



Решение

Подставляем $n = 7$ в формулу площади:

$$S_{\text{новая}} = S_{\text{старая}} \cdot 7^2 \quad S_{\text{новая}} = 49 \cdot S_{\text{старая}}$$

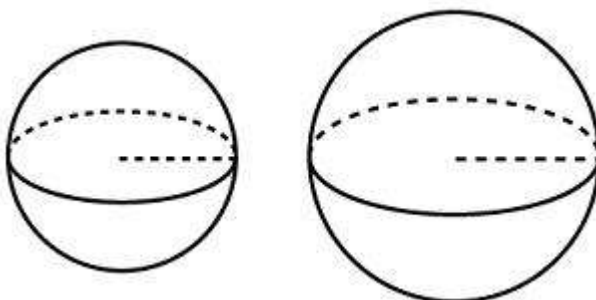
Итак, площадь увеличится в 49 раз — это и есть ответ.

Обратите внимание, что это выполняется для любой пирамиды.

Ответ: 49

Задача

Площадь первой сферы равна 175. Найдите площадь второй сферы, если ее радиус в 5 раз меньше радиуса первой.



2 сфера

1 сфера

Решение

Работаем по той же формуле: $n = 5$. Но вместо умножения будет деление, поскольку радиус уменьшается. Имеем:

$$S_{\text{новая}} = S_{\text{старая}} : n^2 = 175 : 5^2 = 175 : 25 = 7$$

Ответ

7

Задача

В пространстве даны два прямых круговых конуса. У второго конуса радиус основания и высота в 3 раза больше, чем у первого. Найдите площадь боковой поверхности первого конуса, если площадь боковой поверхности второго равна 324 см^2 .

Решение

Чтобы решить задачу, надо понять, как из первого конуса получается второй. По условию, нам известны следующие величины:

1. $n = 3$ — именно во столько раз растягивается первый конус по каждой оси;
2. $S_{\text{новая}} = 324$ — площадь второго конуса.

Подставляем эти числа в нашу формулу — получаем:

$$S_{\text{новая}} = S_{\text{старая}} \cdot n^2$$

$$324 = S_{\text{старая}} \cdot 9$$

$$S_{\text{старая}} = 324 : 9 = 36$$

Умножение на n^2 (а не деление) мы берем потому, что второй конус больше первого. Полученная площадь — это и есть ответ.

Ответ

36